ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Εισαγωγή

Διαφορική εξίσωση είναι μία εξίσωση όπου ο άγνωστος είναι μια συνάρτηση y και η εξίσωση αυτή εμπεριέχει τις παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης . Μια διαφορική εξίσωση καλείται συνήθης αν η συνάρτηση y έχει μια μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή.

Παράδειγμα 1.1

Οι παρακάτω εξισώσεις είναι συνήθεις διαφορικές

A. $xy'' + 5x^2y + 6y = 0$. B. $y' = y$ όπου $y = y(x)$. ■

Λύση μιας διαφορικής εξίσωσης καλείται κάθε συνάρτηση που την ικανοποιεί.

Παράδειγμα 1.2

Μια λύση της εξίσωσης $y' = y$ είναι η $y = e^x$ γιατί $\left(e^x\right)' = e^x$. Όμοια παρατηρούμε ότι και η συνάρτηση $y = 2e^x$ είναι άλλη μια λύση της ίδιας εξίσωσης ■

Γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης καλούμε το σύνολο όλων των λύσεων π.χ. η $y = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$ είναι γενική λύση της εξίσωσης $y' = y$.

Ορίζουμε ως τάξη της διαφορικής εξίσωσης , την μεγαλύτερη από τις παραγώγους της

Παράδειγμα 1.3

Η εξίσωση $y^{(3)} - xy'' + 5y = x$ είναι τρίτης τάξης ενώ η $y^{(5)} - 3xy'' + 5y = e^x$ είναι $5^{ης}$ τάξης. ■

Όταν από τις άπειρες λύσεις (γενική λύση) ζητείται μια συγκεκριμένη λύση που ικανοποιεί ορισμένες συνθήκες σ' ένα σημείο x_0, τότε λέμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (Π. ΑΤ.).

Παράδειγμα 1.3

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = y$ και $y(0) = 1$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η γενική λύση είναι $y = ce^x$. Από την σχέση $y(0) = 1$ παίρνουμε $1 = ce^0 \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $y = e^x$ ■

2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ης ΤΑΞΗΣ

Πρόκειται για εξισώσεις της μορφής $y' = f(x,y)$ ή της μορφής $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

2.1 Χωριζομένων μεταβλητών

Είναι διαφορικές εξισώσεις της που ανάγονται στην μορφής

$$y' = \frac{Q(x)}{P(y)}$$

χαρακτηριστικό των εξισώσεων αυτών είναι ότι μπορούμε να «χωρίζουμε τα y από τα x» κατά τον παρακάτω τρόπο

Παράδειγμα 2.1.1

Να λυθεί η εξίσωση $y' = \dfrac{x^2}{1-y^2}$

Λύση

Η εξίσωση διαδοχικά γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2} \Leftrightarrow \left(1-y^2\right)dy = x^2 dx \Leftrightarrow \int \left(1-y^2\right)dy = \int x^2 dx + c \Leftrightarrow y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3y + y^3 = c$$

Παρατηρούμε ότι η λύση είναι σε πεπλεγμένη μορφή, δηλαδή δεν βρίσκουμε άμεσα τον τύπο της y.

Παράδειγμα 2.1.2

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $\left(1+e^x\right)yy' = e^x$ με $y(0)=1$.

Λύση

Χωρίζοντας τους αγνώστους η εξίσωση διαδοχικά γράφεται

$$yy' = \frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}y = \frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow \int y dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx + c \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \ln\left(1+e^x\right) + c$$

Οπότε έχουμε $y = \pm\sqrt{2\ln\left|1+e^x\right| + 2c}$. Από την αρχική συνθήκη $y(0)=1$ προκύπτει $y = +\sqrt{2\ln\left|1+e^x\right| + 2c}$ και $c = \frac{1}{2} - \ln 2$. Τελικά $y = \sqrt{2\ln\dfrac{\left|1+e^x\right|}{2} + 1}$. ■

Παράδειγμα 2.1.3

Να λυθεί η εξίσωση $y' = y$.

Λύση

Α. Αν $y \neq 0$ τότε διαιρώντας με y παίρνουμε

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

Ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$\ln|y| = x + c \Leftrightarrow |y| = e^{x+c} \Leftrightarrow y = \pm e^c e^x$$

Θέτοντας $\pm e^c = C$ έχουμε την λύση $y = Ce^x$.

Β. Αν $y = 0$ βλέπουμε ότι η διαφορική εξίσωση ικανοποιείται οπότε είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

β΄ τρόπος

Πολλαπλασιάζοντας με e^x διαδοχικά έχουμε

$$e^x y' = ye^x \Leftrightarrow e^x y' - ye^x = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x y' - ye^x}{\left(e^x\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{e^x}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{e^x} = c \Leftrightarrow y = ce^x$$

Ο β΄ τρόπος σπάνια εφαρμόζεται.

Σχόλιο: Στην πρώτη λύση χρειάστηκε να διαιρέσουμε με y. Σ' αυτήν την περίπτωση πρέπει στο τέλος της λύσης να εξετάσουμε τι συμβαίνει αν y = 0.

Παράδειγμα 2.1.3

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'\sin x = y\ln y$ με αρχική συνθήκη $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Λύση

Αν $y \neq 1$ έχουμε

$$\frac{dy}{dx}\sin x = y\ln y \Leftrightarrow \frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} + c$$

Το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\sin x}$ γράφεται

$$\int \frac{dx}{\eta\mu x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

Όμοια το ολοκλήρωμα $\int \frac{dy}{y\ln y}$ γράφεται

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{(\ln y)'}{\ln y}dy = \ln|\ln y|$$

Η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right| + c \Leftrightarrow \ln|\ln y| = \ln\left|\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right| + \ln|k| \Leftrightarrow \ln|\ln y| = \ln\left|k\varepsilon\phi\frac{x}{2}\right| \Leftrightarrow$$
$$\ln y = \pm k\varepsilon\phi\frac{x}{2} \Leftrightarrow \ln y = c\varepsilon\phi\frac{x}{2} \Leftrightarrow y = e^{c\varepsilon\phi\frac{x}{2}}$$

Με $c \neq 0$ (γιατί αν $c = 0 \Rightarrow y = 1$). Τέλος η φ = 1 ικανοποιεί την (ε) οπότε η γενική λύση δίνεται $y = e^{c\cdot\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}$, φ = 1. Οπότε η μοναδική λύση που ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι y = 1.

$$y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)} \Leftrightarrow ydy = \frac{x^2}{1+x^3}dx \Leftrightarrow \int ydy = \int \frac{x^2}{1+x^3}dx + c \Leftrightarrow$$
$$\frac{y^2}{2} = \int \frac{1}{3}\frac{(x^3+1)'}{x^3+1} + c \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + c \Leftrightarrow 3y^2 = 2\ln|x^3+1| + 2c \Leftrightarrow$$
$$3y^2 - 2\ln|x^3+1| = c \qquad x \neq -1$$

Ε) Αν $y \neq 0$

$$y' + y^2\sin x = 0 \Leftrightarrow y' + y^2\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow y' = -y^2\eta\mu x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y^2\eta\mu x \Leftrightarrow$$
$$\frac{dy}{y^2} = -\eta\mu x dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int -\eta m x dx + c \Leftrightarrow \frac{y-2+1}{-2+1} = -\int +\eta\mu x dx + c \Leftrightarrow$$
$$-y^{-1} = -(-\sigma\upsilon\nu x) + c \Leftrightarrow -y^{-1} = \sigma\upsilon\nu x + c \Leftrightarrow y^{-1} + \sigma\upsilon\nu x = c$$

Τέλος με αντικατάσταση βλέπουμε ότι η y = 0 ικανοποιεί την (Ε).
Τελικά $y^{-1} + \text{συν}x = c$ και $y = 0$

$$y' = (1-2x)y^2 \qquad y(0) = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(1-2x\right)y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2}=\left(1-2x\right)dx \Leftrightarrow \int y^{-2}dy=\int\left(1-2x\right)dx+c \Leftrightarrow$$

Αν $y\neq 0$ $\frac{y^{-1}}{-1}=x-x^2+c \Leftrightarrow -y^{-1}=x-x^2+c \Leftrightarrow -\frac{1}{y}=x-x^2+c \Leftrightarrow \frac{1}{y}=x^2-x-c \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{x^2-x-c} \\ y\left(0\right)=-\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6}=\frac{1}{0^2-0-c} \Leftrightarrow -\frac{1}{6}=-\frac{1}{c} \Leftrightarrow c=6 \end{array}\right\} y=\frac{1}{x^2-x-6}$$

Την $y=0$ την απορρίπτουμε αμέσως μιας και $y(0)=0\neq -\frac{1}{0}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^{y}} \Leftrightarrow \left(y+e^{y}\right)dy=\left(x-e^{-x}\right)dx \Leftrightarrow \int\left(y+e^{y}\right)dy=\int\left(x-e^{-x}\right)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{y^2}{2}+e^{y}=\frac{x^2}{2}-\frac{e^{-x}}{-1}+c \Leftrightarrow \frac{y^2}{2}+e^{y}=\frac{x^2}{2}+e^{-x}+c \Leftrightarrow$$

$$y^2+2e^{y}=x^2+2e^{-x}+2c \Leftrightarrow y^2-x^2+2\left(e^{y}-e^{-x}\right)=c$$

$$\left(1+y^2\right)dx+\left(1+x^2\right)dy=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(1+y^2\right)dx=-\left(1+x^2\right)dy \Leftrightarrow \frac{dy}{\left(1+y^2\right)}=\frac{-dx}{\left(1+x^2\right)} \Leftrightarrow$$

$$\int\frac{dy}{\left(+y^2\right)}=-\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)}+c \Leftrightarrow \tau o\xi\varepsilon\phi y=-\tau o\xi\varepsilon\phi x+c \Leftrightarrow$$

με εφαρμογή του τύπου $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$

$$y=\frac{\varepsilon\varphi c-x}{1+\varepsilon\varphi c-x}=\frac{k-x}{1+kx}$$

$y\ln y dx+xdy=0$ (E) $y/x=1=1$

Αν $y\neq 1$

$$y\ln y dx=-xdy \Leftrightarrow \frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y\ln y}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int-\frac{dy}{y\ln y}+c \Leftrightarrow \int\left(\ln x\right)' dx=-\int\frac{\left(\ln y\right)'}{\ln y}dy+c \Leftrightarrow$$

$$\ln|x|=-\ln|\ln y|+c \Leftrightarrow \ln|x|+\ln|\ln y|=c \Leftrightarrow c=\ln|k|$$

$$\ln|x\ln y|=\ln|k| \Leftrightarrow e^{\ln|x\ln y|}=e^{\ln k} \Leftrightarrow |x\ln y|=|k| \Leftrightarrow$$

$$x\ln y=\pm k \Leftrightarrow \ln y=\frac{\pm k}{x} \Leftrightarrow e\frac{\pm k}{x}=y \qquad (k\neq 0)$$

Επίσης έχουμε ότι η $y = 1$ είναι λύση (αντικατάσταση στην (Ε)) οπότε $y = 1$ είναι η λύση του …

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Μια συνάρτηση λέγεται ομογενής (n) βαθμού αν:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Παράδειγμα 2.2.1

Έστω $f(x,y) = xy$ τότε $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \lambda y = \lambda^2 xy = \lambda^2 f(x, y)$. Άρα η συνάρτηση είναι ομογενής β΄ βαθμού

Παράδειγμα 2.2.2

Αν $f(x,y) = x^3 y^3$ τότε $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3 = \lambda^3 (x^3 + y^3) = \lambda^3 f(x, y)$ και άρα η f είναι ομογενής συνάρτηση γ΄ βαθμού.

Η ομογενής διαφορική εξίσωση έχει δύο τρόπους να παρουσιάζεται:

1. $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ όπου P, Q ομογενής συνάρτηση ιδίου βαθμού
2. $y' = \dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ δηλαδή όπου βλέπουμε $\left(\dfrac{y}{x}\right)$ είναι ομογενής

   π.χ. $y' = \sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} + \dfrac{y}{x}$

Η μέθοδος επίλυσης είναι θέτουμε $\dfrac{y}{x} = z$ και διαδοχικά έχουμε

$$\frac{y}{x} = z \Leftrightarrow y = zx \Leftrightarrow y' = (zx)' \Leftrightarrow y' = z'x + z(x)' \Leftrightarrow y' = z'x + z$$

Η ομογενής διαφορική μετατρέπεται (ανάγεται) σε χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα 2.2.2

Να λυθεί η $xy' = \sqrt{x^2 - y^2 + y}$.

Λύση

Διαιρούμε με $x \neq 0$

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

Θέτουμε $\dfrac{y}{x} = z \Leftrightarrow y = zx \Leftrightarrow y' = z'x + z$

Άρα $z'x+z=\sqrt{1-z^2}+z \Leftrightarrow z'x=\sqrt{1-z^2} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx}x=\sqrt{1-z^2}$

Αν $z \neq \pm 1$ τότε έχουμε

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int \frac{dx}{x}+c \Leftrightarrow \text{τοξημ}z=\ln|x|+c$$

Και άρα $z=\eta\mu(\ln|x|+c) \Leftrightarrow \frac{y}{x}=\eta\mu(\ln|x|+c)$. Τέλος αν $z=1 \Leftrightarrow y=x$ παρατηρούμε ότι η (1) ικανοποιείται. Όμοια αν $z=-1$, $y=-x$ που όμοια αποτελεί λύση.

Παράδειγμα 2.2.3

Να λυθεί η εξίσωση $y'=\frac{x^2+y^2}{xy}$.

Λύση

Η συναρτήσεις x^2+y^2 και xy είναι ομογενείς β΄ βαθμού. Αν θέσουμε $y=zx \Leftrightarrow y=z'x+z$ τότε δεύτερο μέλος γίνεται

$$\frac{x^2+y^2}{yx}=\frac{x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}{x^2\frac{y}{x}}=\frac{1+z^2}{z}=\frac{1}{z}+z$$

Και άρα η διαφορική γράφεται

$$y'=\frac{x^2+y^2}{xy} \Leftrightarrow \dot{z}x+z=z+\frac{1}{z} \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{1}{z} \Leftrightarrow zdz=\frac{dx}{x}$$

Που ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int zdz=\int \frac{dx}{x}+c \Leftrightarrow \frac{z^2}{2}=\ln|x|+c$$

Αντικαθιστώντας $z=\frac{y}{x}$ έχουμε $\frac{y^2}{x^2}=2\ln|x|+c$. θέτουμε $c=\ln|k|$ και ή σχέση γράφεται $y^2=2x^2\ln|kx|$

Ειδική περίπτωση που ανάγεται σε ομογενή διαφορική

Θεωρούμε την (Δ.Ε) της μορφής

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$

Επίσης θεωρούμε το σύστημα ευθειών

$$(\Sigma)\ \begin{cases}\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1=0\\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2=0\end{cases}$$

και γι' αυτές διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Να τέμνονται σε μοναδικό σημείο (x_0,y_0)
2) Να είναι παράλληλες ή να ταυτίζονται

Έστω ότι τέμνονται στο (x_0,y_0)

Θέτουμε $\begin{cases}x=x_0+X\\ y=y_0+Y\end{cases}$ όπου *X, Y* είναι οι νέες μεταβλητές . Η διαφορική οδηγείται σε ομογενή α΄ βαθμού και θέτοντας $Y=zX$ ανάγεται σε χωριζομένων μεταβλητών

Να λυθεί εξίσωση $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$

Λύση

$$(x+y-2)dx=-dy(x-y+4)\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{(x+y-2)}{(x-y+4)}$$

Λύνουμε το σύστημα για να βρούμε τις συντεταγμένες

$\begin{cases}x+y-2=0\\ x-y+4=0\end{cases}$ του σημείου τομής . Ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{cases}x+y=2\\ x-y=-4\end{cases}\Leftrightarrow 2x=-2\Leftrightarrow\begin{matrix}x=-1\\ y=3\end{matrix}$$

Αλλαγή μεταβλητής

Θέτουμε $\begin{cases}x=-1+X & dx=d(-1+X)=dX\\ y=3+Y & dy=d(3+Y)=dY\end{cases}$

Έχουμε λοιπόν αλλαγή μεταβλητής

$\frac{dY}{dX}=\frac{-(X+Y)}{X-Y}$ ομογενής α΄ βαθμού

Θέτουμε $Y=zX \Leftrightarrow Y'=z'X+z$

$z'X+z=\frac{-(X+zX)}{X-zX} \Leftrightarrow z'X+z=$

$\frac{-X(1+z)}{X(1-z)} \Leftrightarrow z'X+z=-\frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow z'X+z=\frac{1+z}{z-1} \Leftrightarrow$

$z'X=\frac{1+z}{z-1}-z \Leftrightarrow \frac{dz}{dX}X=\frac{1+z-z^2+z}{z-1} \Leftrightarrow \frac{dz(z-1)}{1+2z-z^2}=\frac{dX}{X} \Leftrightarrow$

$\int\frac{dz(z-1)}{1+2z-z^2}=\int\frac{dX}{X}+c \Leftrightarrow \frac{-1}{2}\int\frac{(-2z+2)dz}{1+2z-z^2}=\int\frac{dx}{x}+c \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}\int\frac{(-z^2+2z+1)'}{1+2z-z^2}dz=\int\frac{dX}{X}+c \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1+2z-z^2\right|=\ln|X|+c$

$-\frac{1}{2}\ln\left|1+2z-z^2\right|=\ln|X|+\ln|k| \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1+2z-z^2\right|=\ln|kX| \Leftrightarrow$

$\ln\left|1+2z-z^2\right|=-2\ln|kX| \Leftrightarrow \ln\left|1+2z-z^2\right|=\ln|kX|^{-2} \Leftrightarrow$

$\left|1+2z-z^2\right|=|kX|^{-2} \Leftrightarrow \left|1+2z-z^2\right|=\frac{1}{k^2X^2} \Leftrightarrow 1+2z-z^2=\pm\frac{1}{k^2X^2} \Leftrightarrow$

$1+2z-z^2=\frac{c}{X^2} \Leftrightarrow 1+2\frac{Y}{X}-\frac{Y^2}{X^2}=\frac{c}{X^2}$

$1+z\frac{Y-3}{X+1}-\frac{(Y-3)^2}{(X+1)^2}=\frac{c}{(X+1)^2}$ πολλαπλασιάζουμε με $(X+1)^2$

$(X+1)^2+2(Y-3)(X+1)-(Y-3)^2=c$

Ευθείες παράλληλες ή ταυτιζόμενες

$$\frac{dY}{dX}=\frac{\alpha_1X+\beta_1Y+\gamma_1}{\alpha_2X+\beta_2Y+\gamma_2}$$

Θέτουμε $\alpha X+\beta Y=z$

ΠΛΗΡΕΙΣ Ή ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης είναι πλήρης ή ακριβής αν η εξίσωση $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ αντιστοιχεί σε διαφορικό συνάρτησης F. Δηλαδή αν

$$dF=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$$

Γνωρίζοντας ότι $dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$ και $dF=M(x,y)dx+N(x,y)dy$ άρα προκύπτει

$$\begin{cases}\dfrac{dF}{dx}=M\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\mathrm{N}\end{cases}$$

Από τις τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε την συνάρτηση F. Τέλος επειδή $dF=0$ προκύπτει $F=c$.

Άσκηση 1

Να λυθεί η $\left(2\mathrm{x}+\mathrm{y}^2\right)\mathrm{dx}+2\mathrm{xydy}=0$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\theta M}{dy}=2y=\frac{\theta N}{dx} \quad \text{(πλήρης)}$$

Άρα η εξίσωση είναι ακριβής. Θα βρούμε την συνάρτηση διαφορικού F

$$\frac{dF}{dx}=M\Rightarrow\frac{\theta F}{\theta x}=2x+y^2\Rightarrow F(x,y)=\int\left(2x+y^2\right)dx+g(y)$$

Τελικά $F(x,y)=x^2+y^2x+g(y)$.

Από την δεύτερη σχέση παίρνουμε

$$\frac{dF}{dy} = N \Rightarrow 0 + 2yx + g'\left(y\right) = 2xy \Rightarrow g'\left(y\right) = 0 \Rightarrow g\left(y\right) = 0$$

Τελικά $F\left(x, y\right) = c \Rightarrow x^2 + y^2 x = c$

<u>Άσκηση 2</u>

Να λυθεί $\left(e^x + 3y\right)dx + \left(3x + \cos y\right)dy = 0$

<u>Λύση</u>

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\theta M}{dy} = 3 = \frac{\theta N}{dx} \quad \text{(πλήρης)}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς χ έχουμε

$$\frac{df}{dx} = M \Rightarrow \frac{df}{dx} = e^x + 3y \Rightarrow f\left(x, y\right) = \int e^x + 3ydx + gy$$
$$f\left(x, y\right) = e^x + 3yx + g\left(y\right)$$

$$\frac{df}{dy} = N \Leftrightarrow 3x + \cos y = 3x + g\left(y\right) \Leftrightarrow g'\left(y\right) = \cos y \Leftrightarrow g\left(y\right) = \sin y + c$$

Τελικά

$F\left(x, y\right) = e^x + 3yx + \sin y$ ή $e^x + 3yx + \sin y = c$

ΧΡΗΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ

Πολλές φορές η διαφορική εξίσωση $\mathrm{M}(\mathrm{x,y})dx + N(x,y)dy = 0$ δεν είναι πλήρης δηλαδή $\frac{dM}{dy} \neq \frac{dN}{dx}$. Σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με μια συνάρτηση $\mu(x,y)$ ώστε η καινούργια (ΔΕ)

$$\underbrace{\mu(x,y)M(x,y)}_{\mathrm{M}^*}dx + \underbrace{N(x,y)\mu(x,y)}_{N^*}dy = 0$$

να είναι πλήρης . Παρατούμε ότι αυτό ισχύει όταν

$$\frac{\partial M^*}{dy} = \frac{dN^*}{dx} \Leftrightarrow \frac{\partial(\mu M)}{dy} = \frac{d(\mu N)}{dx}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου προκύπτει

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

Οι παραπάνω εξίσωση μπορεί μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις να λυθεί διακρίνουμε λοιπόν τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $\mu = \mu(x)$ τότε η εξίσωση γίνεται

$$0 + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \dot{\mu}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\dot{\mu} \Leftrightarrow \dot{\mu} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)/N$$

Με την προϋπόθεση ότι

$$\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)/N = f(x) \quad \text{τότε} \quad \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

2. Όμοια αν $\mu = \mu(y)$

$$\dot{\mu}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = 0 + \mu\frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow M\dot{\mu} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \Leftrightarrow \dot{\mu} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)/N$$

Με την προϋπόθεση λοιπόν ότι

$$\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)/M = g(x) \quad \text{τότε} \quad \mu(y) = e^{\int g(y)dy}$$

Άσκηση 1

Να λυθεί $\left(x+y^2\right)dx-2xydy=0$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\frac{dM}{dy}=2y\neq-2y=\frac{\partial N}{\partial x}$ δηλαδή δεν είναι πλήρης . Δοκιμάζουμε την πρώτη περίπτωση

$$\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)/N=\frac{2y-(-2y)}{-2xy}=-\frac{2}{x}=f(x)$$

Άρα ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$\mu(x)=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=\left(e^{\ln|x|}\right)^{-2}=|x|^{-2}=\frac{1}{x^2}$$

Πολλαπλασιάζουμε με μ την αρχική εξίσωση και παίρνουμε

$$\left(\frac{x+y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2xy}{x^2}dy=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0$$

Επαλήθευση

$$\frac{dM*}{dy}=\frac{2y}{x^2}=\frac{dN*}{dx}=\frac{2y}{x^2}$$

$$\frac{df}{dx}=M* \text{ ή } \frac{df}{dx}=\frac{1}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\Rightarrow f(x,y)=\ln|x|-\frac{y^2}{x}+g(y)$$

$$\frac{df}{dy}=N\Rightarrow-\frac{2y}{x}+g'(y)=-\frac{2y}{x}\Rightarrow g'(y)=0\Rightarrow g(y)=0$$

Τελικά $f(x,y)=c$ $\quad \ln|x|-\frac{y^2}{x}=c$

$$\left(2xy^2-3y^3\right)dx+\left(7-3xy^2\right)dy=0$$

$$\frac{\theta M}{\theta y}=4xy-gy^2 \qquad \frac{dN}{dx}=-3y^2$$

$$\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)/N=\frac{4xy-9y^2+3y^2}{7-3xy^2}=\frac{4xy-6y^2}{7-3xy^2}$$

$$\left(\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right)/M=\frac{-6y^2-4xy+9y^2}{2xy^2-3y^3}=\frac{3y^2-4xy}{y^2\left(2x-3y\right)}=\frac{3y-4x}{y\left(2x-3y\right)}=-\frac{2}{y}$$

$$\mathrm{M}(\mathrm{y})=\mathrm{e}^{\int-\frac{2}{\mathrm{y}}}=\frac{1}{\mathrm{y}^2}$$

$$\frac{1}{y^2}\left(2xy^2-3y^3\right)dx+\frac{1}{y^2}\left(7-3xy^2\right)dy=0$$

$$\left(2x-3y\right)dx+\left(\frac{7}{y^2}-3x\right)dy=0$$

$$\frac{df}{dx}=2x-3y \quad f\left(x,y\right)=\int 2x-3ydx \quad f\left(x,y\right)=x^2-3yx+g\left(y\right)$$

$$\frac{df}{dx}=N^*\Rightarrow -3x+g'\left(y\right)=\frac{7}{y^2}-3x$$

$$\mathrm{g}'(\mathrm{y})=\frac{7}{\mathrm{y}^2} \quad \mathrm{g}(\mathrm{y})=-\frac{7}{\mathrm{y}}$$

$$\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{c}\Rightarrow \mathrm{x}^2-3\mathrm{yx}-\frac{7}{\mathrm{y}}=\mathrm{c}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

$\dot{y} + ay = b$

$y' + x^2 y = e^x$

$y' + x^2 y^3 = e^x$ όχι γραμμική απαγορεύονται δυνάμεις του y

$$y = e^{-\int \alpha(x)dx}\left(c + \int b(x) e^{\int \alpha(x)dx} dx\right)$$

<u>Ασκηση1</u>

Να λυθεί η (ΔΕ) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

Λύση

$$y = e^{-\int 2xdx}\left(c + \int 2xe^{-x^2} e^{\int 2xdx} dx\right) = e^{-x^2}\left(c + \int 2xe^{-x^2} e^{x^2} dx\right) =$$
$$= e^{-x^2}\left(c + \int 2xdx\right) = e^{-x^2}\left(c + x^2\right) = ce^{-x^2} + e^{-x^2} \cdot x^2$$

<u>Ασκηση2</u>

Να λυθεί η (ΔΕ) $y' + 2y = e^{-x}$

Λύση

$$y = e^{-\int 2dx}\left(c + \int e^{-x} e^{\int 2dx} dx\right) = e^{-2x}\left(c + \int e^{-x} e^{2x} dx\right) \Rightarrow y = e^{-2x}\left(c + \int e^{x} dx\right) \Rightarrow$$
$$y = e^{-2x}\left(c + e^{x}\right) \Rightarrow y = e^{-2x} \cdot c + e^{-x}$$

$y' - 2xy = 2xe^{x^2}$

$y = e^{\int 2xdx}\left(c + \int 2xe^{x^2} e^{-\int 2xdx} dx\right) \Rightarrow$

$y = e^{\int 2xdx}\left(c + \int 2xe^{x^2} e^{-x^2 dx} dx\right) \Rightarrow$

$y = e^{\int 2xdx}\left(c + x^2\right) \Rightarrow y = e^{x^2}\left(c + x^2\right) = \ldots$

ΠΑΓΙΔΑ

$xy' - 2y = x^3 \cos x$

$$y' - \frac{2}{x} y = x^2 \cos x$$

$$y = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(c + \int e^{\int -\frac{2}{x} dx} x^2 \cos x dx \right) \Rightarrow$$

$$y = e^{2 \ln|x|} \left(c + \int e^{-2 \ln|x|} x^2 \cos x dx \right) \Rightarrow$$

$$x^2 \left(c + \int \frac{1}{x^2} x^2 \cos x dx \right) = cx^2 + x^2 \sin x$$

BERNOULLI

$$y' + \alpha(x)y = \beta(x)y^{\gamma}$$

$$y' \cdot y^{-\gamma} + \alpha(x)y \cdot y^{-\gamma} = \beta(x) \Leftrightarrow y'y^{\gamma} + \alpha(x)y^{1-\gamma} = \beta(x)$$

$$y^{1-\gamma} = z$$

$$(1-\gamma) \cdot y^{-\gamma} \cdot y' =$$

$$\frac{z'}{1-\gamma} + \alpha(x)z = \beta(x) \quad \text{γραμμική}$$

$$y' + 2xy = 2xy^2$$

$$y'y^{-2} + 2xy^{-1} = 2x$$

$$y^{-1} = z$$

$$-1y^{-2}y' = z'$$

$$-z' + 2xz = 2x$$

$$z' - 2xz = -2x$$

$$z = e^{+\int 2xdx}\left(c + \int -2xe^{\int -2xdx}dx\right)$$

$$= e^{x^2}\left(c + \int -2xe^{-x^2}dx\right) = e^{x^2}\left(c + e^{-x^2}\right) = ce^{x^2} + 1$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) = \int \left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}$$

$$xy' + y = y^2 \ln x \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{y}{xy^2} = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow y' \cdot y^{-2} + \frac{1}{xy} = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y^{-1} = z \\ -1y^{-2}y' = z' \end{array}\right| \Rightarrow -z' + \frac{1}{x} \cdot z = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$$

$$z = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(c + \int -\frac{\ln x}{x}e^{-\int \frac{1}{x}dx}\right)$$

$$z = x\left(c + \int -\frac{\ln x}{x}\frac{1}{x}dx\right)$$

$$z = x\left(c - \int \frac{\ln x}{x^2}dx\right)$$

$$\boxed{\int f'(g) = f \cdot g - \int f \cdot g'} \qquad \text{παραγοντική}$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \int \frac{1}{x^2}\ln x dx = \int \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)' \ln x dx =$$

$$\frac{x^{-1}}{-1}\ln x - \int \frac{x^{-1}}{-1}\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{x}\ln x + \int x^{-2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\boxed{3xy^2y' - 2y^3 = xx}$$

$$3xy' - 2y = x^3y^{-2}$$

$$3xy'y^2 - 2y^3 = x^3$$

$$y^3 = u$$

$$3y^2y' = u'$$

$$xu' - 2u = x^3$$

$$u' = \frac{2}{x}u = x^2$$

$$u = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(c + \int x^2 e^{\int -\frac{2}{x}dx}\right)$$

$$x^2\left(c + \int x^2 - 1x^2 dx\right)$$

$$c - x^2 + x$$

$$2y'\ln x + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y}$$

$$2y'\ln x + \frac{y}{x} = \cos xy^{-1}$$

$$2y'y\ln x + \frac{y^2}{x} = \cos x$$

$$y^2 = z$$

$$2yy' = z'$$

$$z'\ln x + \frac{z}{x} = \text{cs}\, x$$

$$z' + \frac{z}{x\ln x} = \frac{\cos x}{\ln x}$$

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x\ln x}}\left(c + \int \frac{\cos x}{\ln x}e^{\int \frac{1}{x\ln x}dx}\right)$$

$$e^{-\ln|\ln x|}\left(c + \int \cos x e^{\ln|\ln x|}\right)\frac{1}{\ln x}(c + \sin x)$$

$$e^{-\ln|\ln x|}\left(c + \int \cos x e^{\ln|\ln x|}\right)$$

$$\frac{1}{\ln x}(c + \sin x)$$

$$\overbrace{\left(1-x^2y\right)}^{M}dx+x^2\overbrace{\left(y-x\right)}^{N}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-x^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2xy-3x^2$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/N=\frac{-x^2-2xy+3x^2}{x^2\left(y-x\right)}$$

$$\frac{2x\left(x-y\right)}{x^2\left(y-x\right)}=-\frac{2}{x}=f\left(x\right)$$

$$M\left(x\right)=e^{-\int\frac{2}{x}}=\frac{1}{x^2}$$

$$\overbrace{\left(\frac{1}{x^2}-y\right)}^{M*}dx+\overbrace{\left(y-x\right)}^{N*}dy=0$$

$$\left(\frac{\partial M*}{\partial y}=\frac{\partial N*}{\partial x}\right)\ \text{προαιρετικό}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x^2}-y\Rightarrow f\left(x,y\right)=-\frac{1}{x}-yx+g_1y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N*\Rightarrow -x+g'\left(y\right)=y-x$$

$$g\left(y\right)=\frac{y^2}{2}$$

$$f(x,y)=c\Rightarrow -\frac{1}{x}-yx+\frac{y^2}{2}=c$$

$$\left(2xy^2-3y^3\right)dx+\left(7-3xy^2/dy\right)=0$$

$$\frac{dy}{dy}=4xy-9y^2 \qquad \frac{dx}{dx}=-3y^2$$

$$\left(\frac{dy}{dy}-\frac{dx}{dx}\right)/N=\frac{4xy-9y^2+3y^2}{7-3xy^2}=\frac{4xy-6y^2}{7-3xy^2}$$

$$\frac{-3y^2-4xy+9y^2}{2xy^2-3y^3}=\frac{6y^2-4xy}{2xy^2-3y^3}=$$

$$\frac{y(6y-4x)}{y^2(2x-3y)}=-\frac{1}{y}2=-\frac{2}{y} \qquad \mu(\rho)=e^{\int-\frac{2}{\varphi^2}}=\frac{1}{\varphi^2}$$

$$2xy^2 - 3y^3dx + \frac{7-3xy^2}{2}dy = 0$$

$$(2x - 3y)dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)d\varphi = 0$$